

كراسة الطالب



الوحدة التاسعة

التوزيع الإحتمالي



إعداد : نصر حسنين

ماذا سنتعلم ؟

ستتعلّم في هذه الوحدة كيف:

٩-١ تستخدم التباديل والتوافيق في إيجاد الاحتمالات.

٩-٢ تنشئ جدول التوزيع الاحتمالي المتعلق بموقف معيّن يتضمن متغيرًا عشوائيًا منفصلًا (س).

٩-٣ تحسب التوقع ت(س)، والتباين $ع^{٢}$(س)، والانحراف المعياري ع(س) لمتغير عشوائي منفصل.

لماذا ندرس التوزيع الاحتمالي؟

درست سابقًا التباديل والتوافيق واستخدمتها لتحديد عدد الطرق الممكنة لاختيار فريق ما أو لوضع عناصر في ترتيب معيّن.

في هذه الوحدة، سوف تقوم بتوسيع هذه الأفكار حتى تتمكن من حساب **احتمالات probabilities** وقوع أحداث مختلفة.

٩-١ استخدام التباديل والتوافيق في الاحتمالات

إذا كان حدث ما مكونًا من عدد من التباديل أو التوافيق المفضلة المتساوية الاحتمال، فإن احتمال وقوع الحدث يكون:

ل(أ) = $\frac{\text{عدد التباديل المفضلة}}{\text{عدد التباديل الممكنة}}$ ، حيث أ الحدث المفضل

أو

ل(ب) = $\frac{\text{عدد التوافيق المفضلة}}{\text{عدد التوافيق الممكنة}}$ ، حيث ب الحدث المفضل

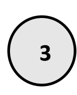
1 اختير طفلان عشوائيًا من مجموعة مكوّنة من ستة أولاد وأربع بنات. استخدم التوافيق لتجد احتمال أن يكون الطفلان:

أ ولدَين   ب بنتَين   ج بنتًا وولدًا

2 اختيرت أربع حبات موز عشوائيًا من صندوق يحتوي على ١٧ حبة موز صفراء اللون و ٢٣ حبة موز خضراء اللون. أوجِد احتمال:

أ أن لا توجد حبات موز خضراء   ب أقل من نصف الحبات المختارة خضراء.

موقع مدونة سلطنة عمان التعليمية www.oman-edu.com



يختار أمين أحد المعارض عشوائيًا ثماني قطع للعرض من بين ٣٦ لوحة تشكيلية و ٤٤ لوحة فنية. أوجِد احتمال أن يتضمن العرض على الأقل ثلاث لوحات تشكيلية أكثر من اللوحات الفنية.



4

على رفّ ١٥ علبة لم يوضع اسم المحتوى لأيّ منها، لكن نعرف أن ٨ منها تحتوي على حساء، و٤ منها تحتوي على فاصولياء، و٣ تحتوي على بازلاء.

إذا اختيرت ٧ علب عشوائيًا بدون إعادة، فأوجد احتمال أن يكون ٥ منها تحتوي على الحساء.

درب نفسك

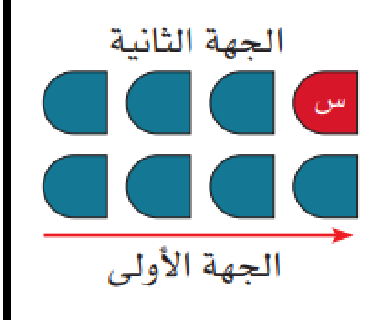
1 في علبة طعام لطالبة ١٣ حبة كرز أحمر، و٧ حبات كرز أسود. إذا أخذت الطالبة ٥ حبات كرز عشوائيًا، فأوجِد احتمال أن تكون قد أخذت كرزًا أحمر أكثر من الكرز الأسود.



2 في صندوق للأدوات الصناعية ٢٥ مفكًا، و ١٦ رأس مثقاب، و ٣٨ مفتاحًا، و ١١ إزميلًا. أوجِد احتمال اختيار أربع أدوات ليس من بينها أيّ إزميل.

3 اِختير طالبان عشوائيًّا من بين مجموعة مكوّنة من ثلاثة طلاب وطالبتَين لتشكيل فريق ثنائي في تحدي العلوم. أوجِد احتمال أن لا يكون الفريق مكوّنًا من طالبتَين.

متع ذهنك



8 حافلة ركاب صغيرة تحتوي على مقعد للسائق (س) ومقاعد لسبعة ركاب كما هو مبيّن.

إذا جلس سبعة ركاب بترتيب عشوائي، فأوجد احتمال أن يجلس راكبان:

أ في الجهة نفسها من الحافلة.

ب في جهتين مختلفتَين من الحافلة.





9 قفل حقيبة مكوّن من ثلاثة أقراص كل منها مرقم بالأعداد من ٠ إلى ٩، رقم واحد فقط من الثلاثة أرقام الممكنة يفتح الحقيبة. أوجِد احتمال اختيار رقم سري لا يفتح الحقيبة.

9 خمس (O) وأربع (X) كُتبت على شبكة من تسعة مربعات. يبيّن الشكل واحدة من التراتيب الممكنة.

X	O	O
O	X	X
O	O	X

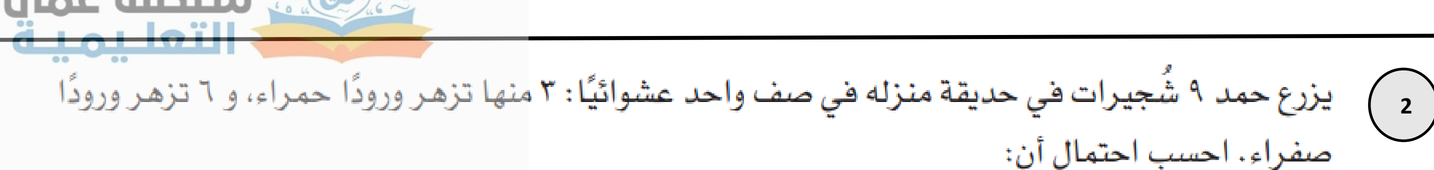
إذا علمت أن جميع (O) و (X) قد كُتبت عشوائيًّا، فأوجِد احتمال أن تشكّل ثلاثة (X) مستقيمًا قطريًّا.

تمارين أكثر

1 اِختير أربعة أحرف مختلفة عشوائيًّا من مجموعة حروف اللغة الإنجليزية التي تتكوّن من ٥ أحرف علة، و ٢١ حرفًا ساكنًا. أوجد احتمال:

أ أن يكون الاختيار مكوّنًا من حرف علة واحد، وثلاثة أحرف ساكنة.

ب أن يكون الاختيار مكوّنًا من حرف علة واحد وثلاثة أحرف ساكنة، بحيث إن حرف العلة لا يقع بين حرفَين ساكنَين.



2 يزرع حمد ٩ شُجيرات في حديقة منزله في صف واحد عشوائيًا: ٣ منها تزهر ورودًا حمراء، و ٦ تزهر ورودًا صفراء. احسب احتمال أن:

أ تقع شجيرة منها تزهر وردة صفراء في المنتصف.

ب لا تكون الشجيرات الثلاث التي تزهر ورودًا حمراء متباعدة.

ج لا تكون الشجيرتان اللتان تزهران ورودًا حمراء متجاورتَين.

3 مجموعة من ١٨٠ شخصًا، تضم ٨٨ رجلًا تسعة منهم يستخدمون يدهم اليسرى للكتابة، وتضم أيضًا ٨٥ أنثى لا يستخدمن اليد اليسرى. إذا اختير ستة أشخاص من المجموعة عشوائيًا، فأوجِد احتمال أن يكون أربعة منهم يستخدمون اليد اليسرى أو إناثًا.

4 في مكتبة صغيرة ١٢٤٠ كتابًا مقسمة إلى: ٤٧٨ رواية ويرمز إليها (ر)، منها ٣١٢ رواية مجلدة بغلاف صلب ويرمز إليها (ص)، ويوجد أيضًا ٤٤٠ كتابًا مجلدًا بغلاف غير صلب. بعض هذه المعلومات مبيّن على مخطط ڤن.

ر: أ	٣١٢	ص: ج
ب		

أ أوجِد قيمة كلٍّ من: أ، ب، ج.

ب اختير ٢٥ كتابًا عشوائيًا ليتم التبرع بها إلى جمعية خيرية، وتأمل الجمعية أن يكون من بينها على الأقل ٢٢ رواية أو كتابًا مجلدًا بغلاف صلب. احسب احتمال أن تحصل الجمعية الخيرية على ما تأمل.

٩-٢ المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع)

مُساعَدة
إذا أمكن للمتغير (س) أن يأخذ قيمًا محددة وقابلة للعد يسمى متغيرًا عشوائيًا منفصلًا.

تعطي المواقف التي يمكن اختيارها دون إعادة **متغيرات عشوائية منفصلة**.

مثال توضيحي 1

عندما نشتري صندوق مانجو يتسع ٦ حبات، فقد يكون عددٌ منها فاسدًا، لذلك قد تأخذ عدد الحبات الفاسدة القيم ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦





نلاحظ أن هذه القيم محددة وقابلة للعد، ويمكن أن نرمز إليها بالرمز (س).



س ∈ {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

مثال توضيحي 2

إذا اخترنا عشوائيًا ثلاثة أطفال من مجموعة تتضمّن أربعة أولاد وبنتَين،
نسمي عدد الأولاد الذين تم اختيارهم متغيّرًا عشوائيًا منفصلًا، ونرمز إليه (و)، حيث و ∈ {١، ٢، ٣}
وكذلك نسمي عدد البنات اللاتي تم اختيارهن متغيّرًا عشوائيًا منفصلًا، ونرمز إليه (ب)، حيث ب ∈ {٠، ١، ٢}.

التوزيع الاحتمالي

التوزيع الاحتمالي probability distribution لمتغيّر عشوائي منفصل هو عرض جميع قيم المتغيّر العشوائي الممكنة مع الاحتمالات المناظرة لها، وطريقة العرض المعتادة هي جداول التوزيع الاحتمالي.

مُساعَدة
النواتج الممكنة لتجربة رمي قطعتَي نقد معدنية منتظمتين هي:
(صورة ، صورة)
(صورة ، كتابة)
(كتابة ، صورة)
(كتابة ، كتابة)

مثال توضيحي

افترض أنك رميت قطعتَي نقد منتظمتَين، فيكون عدد الصور التي يمكن الحصول عليها

س	٠	١	٢
ل (س)	٠,٢٥	٠,٥	٠,٢٥

قانون هام





لاحظ أن Σ ل(س) = ١

---

1 التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل (س) كما في الجدول الآتي:

أوجِد قيمة الثابت **ك**.

س	٦	٧	٨	٩	١٠
ل(س)	ك − ٠,١	ك	١ − ٣ك	٢ − ٦ك	$\frac{١}{٥}$ك + ٠,٠٥

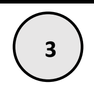
---

2 يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (س):

س	٢	٣	٤	٥
ل(س)	ب	٢ب	$\frac{١}{٢}$ب	٣ب

أ أوجِد قيمة ب

ب احسب ل(٢ < س < ٥).



المتغير العشوائي المنفصل (ط) حيث ط ∈ {٢، ٤، ٦، ٨} ، ل(ط) = $\frac{ك}{ط}$ ، أوجِد قيمة الثابت ك، وقيمة ط الأكثر حدوثًا.



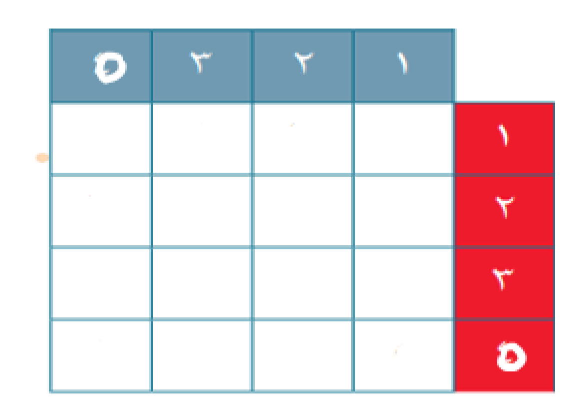
يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (س):

س				
ل (س)				

4

رُمي حجر نرد منتظم مرتَين له ٤ أوجه مرقمة بالأرقام ١، ٢، ٣، ٥ إذا عرف المتغيّر العشوائي (س) بأنه مجموع العددَين الظاهرَين على وجهَي الحجرَين.

أ بيّن أن ل (س = ٨) = $\frac{١}{٨}$



	١	٢	٣	٥
١				
٢				
٣				
٥				

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغيّر (س)، ثم أوجِد ل (س > ٦).

س									
ل (س)									

درب نفسك

1 يمثل الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ح):

ح	٣	٦	٩	١٢	١٥
ل(ح)	٢ك	$ك^٢$	$\frac{ك}{٢}$	$\frac{٤}{٥} - ٣ك$	$\frac{١٣}{٥٠}$

أ اكتب معادلة بدلالة **ك** ثم حلها.

ب لماذا حلّ واحد فقط من حلولك مقبول؟ اشرح إجابتك.

ج أوجِد ل (٦ ≤ ح < ١٠).

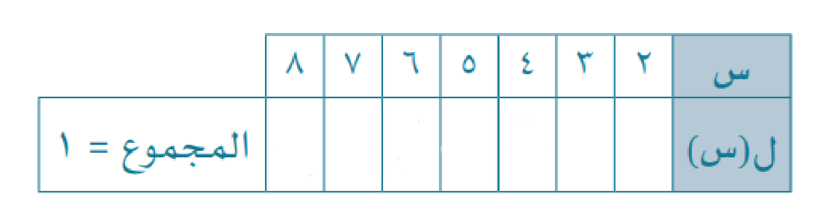


2 تم تدوير القرص المقابل مرتين.
عرّف المتغير العشوائي (س) على أنه مجموع الرقمين اللذين يقف عندهما المؤشر.

أ كوّن مخطط الفضاء الاحتمالي للمتغير (س)

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير (س)

		الدوران الأول			
		١	٢	٣	٤
الدوران الثاني	١				
	٢				
	٣				
	٤				



س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	
ل(س)								المجموع = ١

3 يرغب ثمانية يافعين، ورجل واحد، وامرأة واحدة في ركوب حافلة، حيث توجد ٣ مقاعد شاغرة.

قرر السائق اختيار ٣ منهم عشوائيًا للصعود إلى الحافلة.

أنشئ جدول توزيع احتمالي للمتغيّر (ص) الذي يمثل 'عدد اليافعين المختارين'.

انتبه

على الأقل سيتم اختيار واحد من اليافعين لأنه يوجد فقط اثنان من غير اليافعين.

← نستخدم التوافيق

تمارين أكثر

1 يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (ص):

ص	١	١,١	١,٢	١,٣	١,٤	١,٥
ل(ص)	أ	٠,١٤	٠,٢٧	٠,١٨	٠,٠٨	ب

أ أوجِد قيمة أ + ب.

ب أوجِد ل (ص < ١,٣) إذا علمت أن أ = ٢ب.

2 يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س):

س	٤	٥	٦	٧	٨
ل(س)	٠,٣	٠,٣٤	٠,١٨	٠,١٢	٠,٠٦

أوجِد قيمة ل(٥ < س ≤ ٨).

3 المتغير العشوائي المنفصل (ق) حيث ق ∈ {١، ٢، ٣، ٥} ، وإذا علمت أن ل(ق) = $\frac{١}{٢}$ − ك ق ، حيث **ك** عدد ثابت:

أ بيّن أن ك = $\frac{١}{١١}$

ب احسب احتمال أن تكون قيمة ق عاملًا من عوامل ٦

4 في يومَين من كل أسبوع، تستضيف فاطمة واحدة من صديقاتها الثلاث، احتمال أن تستضيف نوال في أيّ يوم يساوي ٠,٤ بينما فرصة استضافة بدرية وهند متساوية.

أ أوجِد احتمال أن لا تستضيف هند في أيّ يوم في الأسبوع.

ب كوّن جدول توزيع احتمالي للمتغير أ الذي يمثل 'عدد الأيام في أيّ أسبوع تستضيف فاطمة صديقتها نوال'.

5 قرص منتظم مقسم إلى خمسة أجزاء مرقمة ١، ٢، ٣، ٤، ٥، دُوّر ثلاث مرات وعرّف المتغير العشوائي (س) 'عدد مرات ظهور عدد فردي'.

أ بيّن أن ل(س = ١) = $\frac{٣٦}{١٢٥}$

ب أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير (س).

ج أوجِد قيمة $\frac{ل(س = ٢)}{ل(س = ٣)}$

٩-٣ القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي المنفصل

الوسط الحسابي (القيمة المتوقعة) = ت (س) = $\frac{\sum س\ ل\ (س)}{\sum ل\ (س)}$

التباين = $\sum س^{٢} ل\ (س) - (ت\ (س))^{٢}$

تذكير

الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$

1 يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (س). أوجِد القيمة المتوقعة والتباين والانحراف المعياري للمتغيّر (س):

س	٠	٥	١٥	٢٠
ل (س)	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$	$\frac{٥}{١٢}$	$\frac{٣}{١٢}$

درب نفسك

يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ص):

ص	٠	١	٢	٣	٤
ل (ص)	٠,٠٣	٢م	٠,٣٢	م	٠,٠٥

أ أوجِد قيمة م.

ب احسب كلًا من: ت (ص)، $ع^{٢}$ (ص).

منوعات

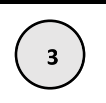
1 (ح) متغيّر العشوائي حيث ح ∋ {١، ٣، ٦، ١٠}. إذا علمت أن احتمالية حدوث قيم ح متساوية، فأوجِد ت (ح)، ع^{٢} (ح).



2 يبيّن الجدول الآتي التوزيع الاحتمالي للمتغيّر العشوائي (ف):

ف	١	٣	٩	م
ل (ف)	٠,٤	٠,٢٨	٠,١٤	٠,١٨

إذا علمت أن ت (ف) = ٥,٣٨، فأوجد قيمة كلٍّ من: م، ع^{٢} (ف).



(ر) متغيّر عشوائي حيث ر ∈ {١٠، ٢٠، ٧٠، ١٠٠}. إذا علمت أن ل(ر) تتناسب مع قيم (ر)، فبيّن أن ت (ر) = ٧٧ ثم أوجد ع^{٢}(ر).





صندوق يحتوي على أربع قطع بسكويت سادة وحبّتَي بسكويت بالشكولاتة. اِختيرت حبّتا بسكويت عشوائيًّا من الصندوق دون إعادة.

بيّن أن احتمال اختيار حبّتَي بسكويت بالشكولاتة يساوي $\frac{١}{١٥}$

تمارين أكثر

1 الجدول الآتي يمثّل التوزيع الاحتمالي للمتغير (ر):

ر	٢٧	٣٣	أ	٥٧
ل(ر)	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,١

إذا علمت أن ت (ر) = ٣٨,٢، فأوجِد قيمة أ، واحسب $ع^2$(ر).

2 لوحة مفاتيح تتألف من عشرة أزرار كل زر يمثّل رقمًا واحدًا من ٠ إلى ٩، طُلب إلى فتاة أن تختار عشوائيًّا زرًّا وتنقره. أوجِد القيمة المتوقعة للاختيار.

3 قرص منتظم له ثلاثة أجزاء مرقمة ١، ٥، أ وقرص آخر منتظم له ثلاثة أجزاء مرقمة ٢، ٦، ب

أ أوجِد قيم أ ، ب إذا علمت أن القيمة المتوقعة لأعداد القرصَين هو ٥، ٦ على الترتيب.

4 دُوِّر كل قرص مرة واحدة وجُمع العددان اللذان يقف عندهما المؤشران لنحصل على قيم المتغير (ط).

١) أنشئ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير (ط).

٢) استخدم الجدول لتجد ت(ط) ، $ع^2$(ط).

5 تحتوي سلة على ٨ بكرات قطن: ٤ منها خُضر، و٣ حُمر، وواحدة صفراء. اختيرت ٣ بكرات قطن عشوائيًا من السلة.

أ بيّن أن القيمة المتوقعة للبكرة الصفراء هي ٠,٣٧٥

ب أوجِد القيمة المتوقعة لعدد البكرات الحُمر.

ج أوجِد القيمة المتوقعة لعدد البكرات الخُضر.